Ch14 : Puissances

I. Introduction :

Regardez la vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=PEYeroumWio

II. Autres exemples :

1. Un laboratoire fait des recherches sur le développement d'une population de bactéries. On a observé que le nombre de bactéries a été multiplié par 3 toutes les heures à partir du moment où l'étude a commencé.

   Par combien le nombre de bactéries a-t-il été multiplié au bout de 24 heures ?

III. Retenir :

1. Définition : Le nombre $7 \times 7 \times 7 \times 7$ se note 7^4 et se lit « 7 puissance 4 » ou « 7 exposant 4 ».

On appelle « a puissance n » ou « a exposant n » le nombre :

$a^n = a \times a \times a \times \dots\dots \times a$

Où le facteur apparaît n fois.

Par convention :

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

2. Puissance d'exposant négatif : Nous admettrons que

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

3. Remarque : Puissance d'un nombre négatif :

   a. Exemple :

$$(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = +625$$

$$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$$

   $(-5)^4$ est positif mais

   $(-5)^3$ est négatif.

Attention ! $(-5)^4 \neq -5^4$

   b. Règle :

   - Un nombre négatif élevé à une puissance paire est positif

- Un nombre négatif élevé à une puissance impaire est négatif.

IV. Règles de calcul avec les puissances

$$a^n \times a^m = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad (a^m)^n = a^{m\times n}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$$

Exemples :

- $3^2 \times 3^4 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 3^6 = 3^{2+4}$
- $2^3 \times 5^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5) = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = (2 \times 5)^3 = 10^3$
- $\frac{7^5}{7^2} = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7} = \frac{7\times7\times7}{1} = 7^3 = 7^{5-2}$
- $(2^3)^4 = (2^3) \times (2^3) \times (2^3) \times (2^3) = 2^{3+3+3+3} = 2^{12} = 2^{3\times4}$
- $\frac{21^3}{7^3} = \frac{21\times21\times21}{7\times7\times7} = 3 \times 3 \times 3 = (\frac{21}{7})^3$

V. Les puissances de 10 :

$10^n = 10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10 = 100 \ldots..0$ (avec n zéros)

$10^{-n} = \frac{1}{10\times10\times\ldots\times10} = 0{,}00 \ldots..01$ (avec n chiffres après la virgule)

Les règles vues dans le cas général s'appliquent avec les puissances de dix. On :

$$10^5 \times 10^3 = 10^8$$

$$\frac{10^7}{10^2} = 10^5$$

VI. Notation scientifique :

Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal avec un chiffre non nul avant la virgule. Cette notation permet de connaître immédiatement l'ordre de grandeur d'un nombre.

Exemples :

$$123 = 12{,}3 \times 10$$

$$123 = 1{,}23 \times 10^2$$

$$123 = 0{,}123 \times 10^3$$

L'ordre de grandeur de 123 est 10^2, donc proche de 100.

Dans un calcul où interviennent des puissances de 10, il sera pratique d'effectuer d'une part des termes sans puissances, et d'autre part les termes avec les puissances.

Exemple :

Imaginons un objet qui parcourt $3{,}5 \times 10^4$ km en $0{,}05$ secondes. On veut calculer sa vitesse. La formule de physique nous donne :

$$v = \frac{distance}{temps}$$

On prend d'abord l'écriture scientifique du temps : $0{,}05 = 5 \times 10^{-2}$ seconde.

On a :

$$v = \frac{3{,}5\times10^4}{5\times10^{-2}} = \frac{3{,}5}{5} \times \frac{10^4}{10^{-2}} = 0{,}7 \times 10^{4-(-2)} = 0{,}7 \times 10^{4+2} = 0{,}7 \times 10^6 = 7 \times 10^5 \text{ Km/h}$$